

5.1 ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Σημείωση

Οι δυνάμεις a^x του κεφαλαίου 4 έχουν βάση $a > 0$ και εκθέτη οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x .

2.

Παραδοχή

$$a^0 = 1$$

3.

Ιδιότητες

$$a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$$

$$a^{x_1} : a^{x_2} = a^{x_1 - x_2}$$

$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$$

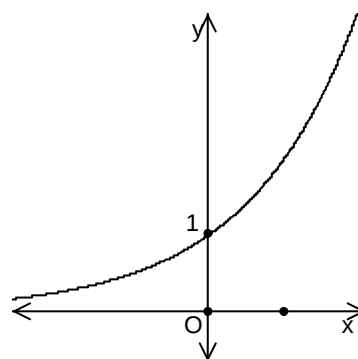
$$(ab)^x = a^x b^x$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

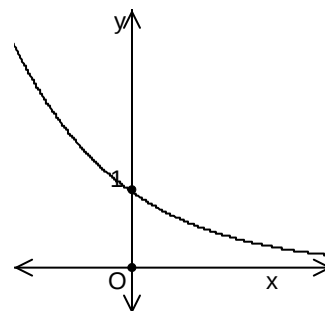
4.

Εκθετική συνάρτηση με βάση a

- Όταν $a > 1$
 $f(x) = a^x$
 Έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$
 Έχει σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$
 Είναι γνησίως αύξουσα
 Τέμνει τον άξονα των y στο σημείο $(0, 1)$
 Έχει ασύμπτωτη τον αρνητικό ημιάξονα των x



- Όταν $0 < a < 1$
 $f(x) = a^x$
 Έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$
 Έχει σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$
 Είναι γνησίως φθίνουσα
 Τέμνει τον άξονα των y στο σημείο $(0, 1)$
 Έχει ασύμπτωτη τον θετικό ημιάξονα των x

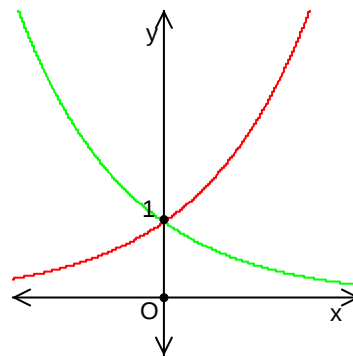


5.

Μια συμμετρία

Οι γραφικές παραστάσεις των

$$f(x) = \alpha^x, \quad g(x) = \alpha^{-x}$$

είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$ 

6.

Σημαντικές ισοδυναμίες

$$\alpha^{x_1} = \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

$$\alpha^{x_1} \neq \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 \neq x_2$$

$$\text{Όταν } \alpha > 1: \alpha^{x_1} > \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$$

$$\text{Όταν } \alpha < 1: \alpha^{x_1} > \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$$

7.

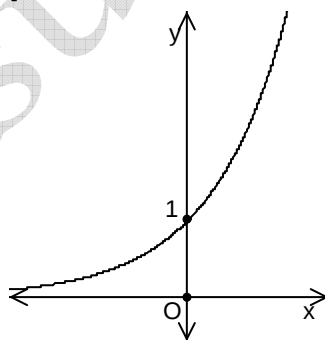
Ο αριθμός e

$$e = \lim_{v \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v = 2,71 \dots \quad (\text{άρρητος, άπειρα δεκαδικά ψηφία και όχι περιοδικός})$$

8.

Η εκθετική συνάρτηση

$$f(x) = e^x$$



9.

Ο νόμος της εκθετικής μεταβολής

$$Q(t) = Q_0 e^{ct} \quad \text{όπου } t \text{ ο χρόνος}$$

$$Q_0 = Q(0)$$

 c σταθερά

ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

Κάτι προφανές

$$\alpha^{-x} = \frac{1}{\alpha^x} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^x$$

2.

Οι ιδιότητες στη γραφική παράσταση

Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha^x$ μπορούμε να συμπεραίνουμε τις ιδιότητές της

3.

Παρατήρηση

Όταν $\alpha = 1$, η $f(x) = \alpha^x$ δε λέγεται και δεν είναι εκθετική.
(Είναι η γνωστή ευθεία $f(x) = 1$)

4.

Προσοχή στην ιδιότητα

Όταν $\alpha < 1$: $\alpha^{x_1} > \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$ (αντιστρέφεται η φορά, όταν $\alpha < 1$)

5.

Μέθοδος

Για να λύσουμε εκθετική εξίσωση ή ανίσωση ή σύστημα, προσπαθούμε να δημιουργήσουμε δυνάμεις που να έχουν ίδιες βάσεις

6.

Ιδιαίτερη περίπτωση

Αν η εξίσωση έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή $(f(x))^{g(x)} = 1$, τότε οι ρίζες της είναι

α) οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 1$

β) οι λύσεις του συστήματος $\{g(x) = 0 \text{ και } f(x) \neq 0\}$

γ) οι λύσεις του συστήματος $\{f(x) = -1 \text{ και } g(x) = \text{άρτιος}\}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

- Να λυθούν οι εξισώσεις
- i) $6^{3-x} = 216$
 - ii) $8^{3x+6} = 2$
 - iii) $16^{5x-6} = 8^{x-1}$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$6^{3-x} = 216 \Leftrightarrow 6^{3-x} = 6^3 \Leftrightarrow 3-x = 3 \Leftrightarrow x = 0$$

ii)

$$8^{3x+6} = 2 \Leftrightarrow (2^3)^{3x+6} = 2$$

$$2^{9x+18} = 2$$

$$9x + 18 = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{17}{9}$$

iii)

$$16^{5x-6} = 8^{x-1} \Leftrightarrow (2^4)^{5x-6} = (2^3)^{x-1}$$

$$2^{20x-24} = 2^{3x-3}$$

$$20x - 24 = 3x - 3$$

$$17x = 21 \Leftrightarrow x = \frac{21}{17}$$

Σχόλιο 5

2.

Να λυθούν οι ανισώσεις **i)** $3^{x^2-5x+6} > 1$

ii) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-4} < \left(\frac{1}{5}\right)^{3x-6}$

iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2} < 32$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$3^{x^2-5x+6} > 3^0 \Leftrightarrow x^2-5x+6 > 0$$

$$x < 2 \quad \text{ή} \quad x > 3$$

Σχόλιο 5

ii)

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-4} < \left(\frac{1}{5}\right)^{3x-6} \Leftrightarrow x^2-4 > 3x-6$$

$$x^2-3x+2 > 0$$

$$x < 1 \quad \text{ή} \quad x > 2$$

Σχόλιο 4

iii)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2} < 32 \Leftrightarrow (2^{-1})^{3x-2} < 2^5$$

$$2^{-(3x-2)} < 2^5$$

$$2^{-3x+2} < 2^5$$

$$-3x+2 < 5 \Leftrightarrow x > -1$$

3.

- Να λυθούν οι εξισώσεις
- i) $2 \cdot 4^{2x} - 17 \cdot 4^x + 8 = 0$
 - ii) $2 \cdot 9^x - 5 \cdot 3^x - 3 = 0$
 - iii) $2^x - 3 \cdot \sqrt{2^x} + 2 = 0$

Προτεινόμενη λύση**i)**Θέτουμε $4^x = y$, οπότε $4^{2x} = y^2$ Η εξίσωση γίνεται $2y^2 - 17y + 8 = 0 \Leftrightarrow y = 8 \text{ ή } y = \frac{1}{2}$

- Για $y = 8$, η $4^x = 8 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^3 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$
- Για $y = \frac{1}{2}$, η $4^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^{-1} \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

ii)Αφού $9^x = (3^2)^x = (3^x)^2$ η εξίσωση γράφεται $2 \cdot (3^x)^2 - 5 \cdot 3^x - 3 = 0$.Θέτουμε $3^x = y$, οπότε η εξίσωση γίνεται $2y^2 - 5y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = 3 \text{ ή } y = -\frac{1}{2}$

- Για $y = 3$, η $3^x = y \Leftrightarrow 3^x = 3^1 \Leftrightarrow x = 1$
- Για $y = -\frac{1}{2}$, η $3^x = y \Leftrightarrow 3^x = -\frac{1}{2}$ η οποία είναι αδύνατη

iii)Αφού $\sqrt{2^x} = 2^{\frac{x}{2}}$, η εξίσωση γίνεται $2^x - 3 \cdot 2^{\frac{x}{2}} + 2 = 0$ Θέτουμε $2^{\frac{x}{2}} = y$ οπότε $2^x = y^2$ Η εξίσωση γίνεται $y^2 - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \text{ ή } y = 2$

- Για $y = 1$, η $2^{\frac{x}{2}} = y \Leftrightarrow 2^{\frac{x}{2}} = 1 \Leftrightarrow 2^{\frac{x}{2}} = 2^0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- Για $y = 2$, η $2^{\frac{x}{2}} = y \Leftrightarrow 2^{\frac{x}{2}} = 2 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow x = 2$

4.Να λυθεί η εξίσωση $8^x - 11 \cdot 4^x + 13 \cdot 2^{x+1} - 16 = 0$ **Προτεινόμενη λύση**

$$8^x - 11 \cdot 4^x + 13 \cdot 2^{x+1} - 16 = 0 \Leftrightarrow (2^3)^x - 11 \cdot (2^2)^x + 13 \cdot 2 \cdot 2^x - 16 = 0$$

$$(2^x)^3 - 11 \cdot (2^x)^2 + 26 \cdot 2^x - 16 = 0$$

Θέτουμε $2^x = y$, οπότε η εξίσωση $\Leftrightarrow y^3 - 11y^2 + 26y - 16 = 0$

$$\text{Horner} \quad y = 1 \text{ ή } y = 2 \text{ ή } y = 8$$

$$2^x = 1 \text{ ή } 2^x = 2 \text{ ή } 2^x = 8$$

$$x = 0 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = 3$$

5.

Να λυθεί η εξίσωση $3 \cdot 2^{x-4} - 5^{x-2} = 2^{x-1} - 6 \cdot 5^{x-3}$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned}
 3 \cdot 2^{x-4} - 5^{x-2} &= 2^{x-1} - 6 \cdot 5^{x-3} & \Leftrightarrow & 3 \cdot 2^x \cdot 2^{-4} - 5^x \cdot 5^{-2} = 2^x \cdot 2^{-1} - 6 \cdot 5^x \cdot 5^{-3} \\
 3 \cdot 2^x \cdot \frac{1}{2^4} - 5^x \cdot \frac{1}{5^2} &= 2^x \cdot \frac{1}{2} - 6 \cdot 5^x \cdot \frac{1}{5^3} \\
 \frac{3}{16} \cdot 2^x - \frac{1}{25} \cdot 5^x &= \frac{1}{2} \cdot 2^x - \frac{6}{125} \cdot 5^x \\
 \frac{3}{16} \cdot 2^x - \frac{1}{2} \cdot 2^x &= \frac{1}{25} \cdot 5^x - \frac{6}{125} \cdot 5^x \\
 2^x \left(\frac{3}{16} - \frac{1}{2} \right) &= 5^x \left(\frac{1}{25} - \frac{6}{125} \right) \\
 -\frac{5}{16} \cdot 2^x &= -\frac{1}{125} \cdot 5^x \\
 5 \cdot 125 \cdot 2^x &= 16 \cdot 5^x \\
 \frac{2^x}{5^x} &= \frac{16}{5 \cdot 125} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5} \right)^x = \left(\frac{2}{5} \right)^4 \Leftrightarrow x = 4
 \end{aligned}$$

6.

Να λυθεί η εξίσωση $7^{\frac{x+4}{3}} - 5^{3x} = 2(7^{\frac{x+1}{3}} + 5^{3x-1})$

Προτεινόμενη λύση

$$7^{\frac{x+4}{3}} - 5^{3x} = 2(7^{\frac{x+1}{3}} + 5^{3x-1}) \Leftrightarrow 7^x \cdot 7^{\frac{4}{3}} - 5^{3x} = 2 \cdot 7^x \cdot 7^{\frac{1}{3}} + 2 \cdot 5^{3x} \cdot 5^{-1}$$

$$7^x \cdot 7^{\frac{4}{3}} - 2 \cdot 7^x \cdot 7^{\frac{1}{3}} = 5^{3x} + \frac{2}{5} \cdot 5^{3x}$$

$$7^x \cdot 7^{\frac{1}{3}} (7 - 2) = 5^{3x} (1 + \frac{2}{5})$$

$$5 \cdot 7^x \cdot 7^{\frac{1}{3}} = \frac{7}{5} \cdot 5^{3x}$$

$$\frac{7^x}{5^{3x}} = \frac{7}{5 \cdot 5 \cdot 7^{\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{7^x}{5^{3x}} = \frac{7^{\frac{2}{3}}}{5^2}$$

$$\left(\frac{7}{5^3}\right)^x = \frac{7^{\frac{2}{3}}}{(5^3)^{\frac{2}{3}}}$$

$$\left(\frac{7}{5^3}\right)^x = \left(\frac{7}{5^3}\right)^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

7.

Να λυθεί η εξίσωση $3 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x + 2^{2x+1} = 0$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned}
 3 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x + 2^{2x+1} &= 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 3^{2x} - 5 \cdot 2^x \cdot 3^x + 2^{2x} \cdot 2 = 0 \\
 \frac{3 \cdot 3^{2x}}{3^{2x}} - 5 \cdot \frac{2^x \cdot 3^x}{3^{2x}} + 2 \cdot \frac{2^{2x}}{3^{2x}} &= 0 \\
 3 - 5 \cdot \frac{2^x}{3^x} + 2 \cdot \frac{2^{2x}}{3^{2x}} &= 0 \\
 3 - 5 \left(\frac{2}{3} \right)^x + 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{2x} &= 0
 \end{aligned}$$

Θέτουμε $\left(\frac{2}{3} \right)^x = y$ **(1)** και η εξίσωση γίνεται $3 - 5y + 2y^2 = 0$

$$y = 1 \quad \text{ή} \quad y = \frac{2}{3}$$

- Για $y = 1$, η (1) $\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3} \right)^x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3} \right)^x = \left(\frac{2}{3} \right)^0 \Leftrightarrow x = 0$
- Για $y = \frac{2}{3}$, η (1) $\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3} \right)^x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 1$

8.

Να λυθεί η εξίσωση $(x^2 - 3x + 1)^{2x+6} = 1$

Προτεινόμενη λύση

Λύσεις της εξίσωσης αυτής είναι τα x εκείνα για τα οποία ισχύει

$$x^2 - 3x + 1 = 1 \quad \text{(1)} \quad \text{ή}$$

$$2x + 6 = 0 \quad \text{και} \quad x^2 - 3x + 1 \neq 0 \quad \text{(2)} \quad \text{ή}$$

$$x^2 - 3x + 1 = -1 \quad \text{και} \quad 2x + 6 \quad \text{άρτιος} \quad \text{(3)}$$

Σχόλιο 6

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 3$$

$$(2) \Leftrightarrow 2x = -6 \quad \text{και} \quad x^2 - 3x + 1 \neq 0$$

$$x = -3 \quad \text{και} \quad 9 - 9 + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x = -3$$

$$(3) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = -1 \quad \text{και} \quad 2x + 6 \quad \text{άρτιος}$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \text{και} \quad 2x + 6 \quad \text{άρτιος}$$

$$x = 1 \quad \text{ή} \quad x = 2, \quad \text{και} \quad 2x + 6 \quad \text{άρτιος} \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ή} \quad x = 2$$

Τελικά οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x = 0$, $x = 3$, $x = -3$, $x = 1$, $x = 2$.

9.

Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = 5^x$ και $g(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$. Να συγκριθούν οι αριθμοί

i) $f(8)$, $f(0)$, $f(4)$

ii) $g(3)$, $g(-2)$, $g(7)$

Προτεινόμενη λύση

i)

Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = 5^x$ έχει βάση $5 > 1$, άρα είναι γνησίως αύξουσα.

Οπότε : $0 < 4 < 8 \Rightarrow f(0) < f(4) < f(8)$

ii)

Η συνάρτηση g έχει βάση $0 < \frac{3}{4} < 1$, άρα είναι γνησίως φθίνουσα.

Οπότε : $-2 < 3 < 7 \Rightarrow g(-2) > g(3) > g(7)$.

10.

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = 5^x$. Να λύσετε την εξίσωση

$$g(x) + g(x+1) + g(x+2) + \dots + g(x+49) = \frac{125(5^{50} - 1)}{4}$$

Προτεινόμενη λύση

Η εξίσωση $\Leftrightarrow 5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} + \dots + 5^{x+49} = \frac{125(5^{50} - 1)}{4}$

$$5^x + 5^x \cdot 5 + 5^x \cdot 5^2 + \dots + 5^x \cdot 5^{49} = \frac{125(5^{50} - 1)}{4} \quad (1)$$

Το πρώτο μέλος είναι το άθροισμα των 50 πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτον όρο $a_1 = 5^x$ και λόγο $\lambda = 5$.

Είναι λοιπόν $S_{50} = \frac{a_1(\lambda^{50} - 1)}{\lambda - 1} = \frac{5^x(5^{50} - 1)}{5 - 1} = \frac{5^x(5^{50} - 1)}{4}$

Η (1) γίνεται $\frac{5^x(5^{50} - 1)}{4} = \frac{125(5^{50} - 1)}{4}$

$$5^x = 125$$

$$5^x = 5^3 \Leftrightarrow x = 3$$

11.

Να λυθεί η ανίσωση $9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 < 0$

Προτεινόμενη λύση

$$9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 < 0 \Leftrightarrow 3^{2x} - 4 \cdot 3^x \cdot 3 + 27 < 0$$

Θέτουμε $3^x = y$, οπότε η ανίσωση γίνεται $y^2 - 12y + 27 < 0 \Leftrightarrow$

$$3 < y < 9$$

$$3 < 3^x < 9$$

$$3 < 3^x < 3^2 \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

12.

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{-2\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + 3\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1}$

Προτεινόμενη λύση

Πρέπει να ισχύει $-2\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + 3\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1 \geq 0$

Θέτουμε $\left(\frac{1}{2}\right)^x = y$, οπότε η ανίσωση γίνεται $-2y^2 + 3y - 1 \geq 0$

$$\frac{1}{2} \leq y \leq 1$$

$$\frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 1$$

$$\frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0$$

$$1 \geq x \geq 0$$

Σχόλιο 4

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = [0, 1]$

13.

Να λυθεί η ανίσωση $e^{x+1} + e^{2x+1} > 1 + e^x$.

Προτεινόμενη λύση

$$e^{x+1} + e^{2x+1} > 1 + e^x \Leftrightarrow e^x \cdot e + e^{2x} \cdot e > 1 + e^x$$

Θέτουμε $e^x = y$ οπότε η ανίσωση γίνεται $ey^2 + ey > 1 + y$

$$ey^2 + (e-1)y - 1 > 0 \quad (1)$$

$$\Delta = (e-1)^2 + 4e = e^2 - 2e + 1 + 4e = e^2 + 2e + 1 = (e+1)^2$$

$$\text{Ρίζες του τριωνόμου} \quad y = \frac{-(e-1) \pm (e+1)}{2e}$$

$$= \frac{-e+1+e+1}{2e} \quad \text{ή} \quad \frac{-e+1-e-1}{2e} = \frac{1}{e} \quad \text{ή} \quad -1$$

$$\text{Η (1)} \Leftrightarrow y < -1 \quad \text{ή} \quad y > \frac{1}{e}$$

$$e^x < -1 \quad \text{ή} \quad e^x > e^{-1}$$

$$\text{αδύνατη} \quad \text{ή} \quad x > -1 \Leftrightarrow x > -1$$

14.Έστω η συνάρτηση $f(x) = 4^x - 12 \cdot 2^x + 4\kappa + 8$

- i) Να βρείτε το κ ώστε να έχει ρίζα το 2 και στη συνέχεια να βρείτε την άλλη ρίζα της
- ii) Για $\kappa = 2$ να βρείτε τα διαστήματα των τιμών του x για τα οποία η γραφική παράσταση της f είναι ψηλότερα από τον άξονα $x'x$.

Προτεινόμενη λύση**i)**

$$\text{Πρέπει } f(2) = 0 \Leftrightarrow 16 - 12 \cdot 4 + 4\kappa + 8 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 6$$

$$\text{Τότε } f(x) = 4^x - 12 \cdot 2^x + 32$$

$$= 2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 32$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$$

$$\text{Θέτουμε } 2^x = y, \text{ οπότε η εξίσωση γίνεται } y^2 - 12y + 32 = 0$$

$$y = 4 \quad \text{ή} \quad y = 8$$

$$2^x = 4 \quad \text{ή} \quad 2^x = 8$$

$$2^x = 2^2 \quad \text{ή} \quad 2^x = 2^3$$

$$x = 2 \quad \text{ή} \quad x = 3$$

Δηλαδή η δεύτερη ρίζα της συνάρτησης είναι το 3

ii)

$$\text{Πρέπει } f(x) > 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 32 > 0$$

$$\text{Θέτουμε } 2^x = y, \text{ οπότε η ανίσωση γίνεται } y^2 - 12y + 32 > 0$$

$$y < 4 \quad \text{ή} \quad y > 8$$

$$2^x < 4 \quad \text{ή} \quad 2^x > 8$$

$$2^x < 2^2 \quad \text{ή} \quad 2^x > 2^3$$

$$x < 2 \quad \text{ή} \quad x > 3$$

15.

Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x) = 2^{2x+3} + 7 \cdot 2^x - 3 \cdot 2^{x+3}$ είναι χαμηλότερα από την ευθεία $y = -2$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned} \text{Πρέπει } f(x) < -2 &\Leftrightarrow 2^{2x+3} + 7 \cdot 2^x - 3 \cdot 2^{x+3} < -2 \\ &2^{2x+3} + 7 \cdot 2^x - 3 \cdot 2^{x+3} + 2 < 0 \\ &2^{2x} \cdot 2^3 + 7 \cdot 2^x - 3 \cdot 2^x \cdot 2^3 + 2 < 0 \\ &8 \cdot 2^{2x} + 7 \cdot 2^x - 24 \cdot 2^x + 2 < 0 \\ &8 \cdot 2^{2x} - 17 \cdot 2^x + 2 < 0 \end{aligned}$$

Θέτουμε $2^x = y$, οπότε η ανίσωση γίνεται $8y^2 - 17y + 2 < 0$

$$\frac{1}{8} < y < 2$$

$$\frac{1}{8} < 2^x < 2$$

$$2^{-3} < 2^x < 2^1$$

$$-3 < x < 1$$

16.

Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} 5^x = 7^y \\ 7^x = 5^y \end{cases}$$

Προτεινόμενη λύση

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις εξισώσεις του συστήματος έχουμε

$$5^x \cdot 7^x = 5^y \cdot 7^y \Leftrightarrow (5 \cdot 7)^x = (5 \cdot 7)^y \Leftrightarrow x = y$$

Η πρώτη εξίσωση του συστήματος γίνεται $5^x = 7^x \Leftrightarrow \frac{5^x}{7^x} = 1$

$$\left(\frac{5}{7}\right)^x = \left(\frac{5}{7}\right)^0$$

$$x = 0$$

οπότε και $y = 0$

17.

Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} 2^x \cdot 2^y = 32 \\ 5^y \cdot 25^x = 625 \end{cases}$$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{cases} 2^x \cdot 2^y = 32 \\ 5^y \cdot 25^x = 625 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x+y} = 2^5 \\ 5^{y+2x} = 5^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=5 \\ y+2x=4 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1 \text{ και } y=6$$

18.

Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} x-y=3 \\ 2^x \cdot 3^y = 288 \end{cases}$$

Προτεινόμενη λύση

Η πρώτη εξίσωση δίνει $x = y + 3$, οπότε η δεύτερη γίνεται $2^{y+3} \cdot 3^y = 288$

$$2^y \cdot 2^3 \cdot 3^y = 288$$

$$(2 \cdot 3)^y = \frac{288}{8}$$

$$6^y = 36$$

$$6^y = 6^2$$

$$y = 2$$

Από την $x = y + 3$ βρίσκουμε $x = 5$

19.

Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} 3^{x+1} + 5^y = 106 \\ 3^x + 5^{y+1} = 152 \end{cases}$$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{cases} 3^{x+1} + 5^y = 106 \\ 3^x + 5^{y+1} = 152 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \cdot 3 + 5^y = 106 \\ 3^x + 5^y \cdot 5 = 152 \end{cases}$$

Θέτουμε $3^x = \omega$ και $5^y = \varphi$ **(1)**

Το σύστημα γίνεται
$$\begin{cases} 3\omega + \varphi = 106 \\ \omega + 5\varphi = 152 \end{cases} \Leftrightarrow (\omega, \varphi) = (27, 25)$$

$$(1) \Leftrightarrow 3^x = 27 \text{ και } 5^y = 25 \Leftrightarrow 3^x = 3^3 \text{ και } 5^y = 5^2$$

$$x = 3 \text{ και } y = 2$$

20.

Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} 3^{\frac{x-y}{2}} - 3^{\frac{x-y}{4}} = 6 \\ 2^{\frac{x+y}{3}} - 2^{\frac{x+y}{6}} = 2 \end{cases}$$

Προτεινόμενη λύση

Θέτουμε $3^{\frac{x-y}{4}} = \omega > 0$

Η πρώτη εξίσωση γίνεται
$$\begin{aligned} \omega^2 - \omega &= 6 \\ \omega^2 - \omega - 6 &= 0 \\ \omega &= 3 \\ 3^{\frac{x-y}{4}} &= 3^1 \\ \frac{x-y}{4} &= 1 \Leftrightarrow x - y = 4 \quad (1) \end{aligned}$$

Θέτουμε $2^{\frac{x+y}{6}} = \varphi > 0$

Η δεύτερη εξίσωση γίνεται
$$\begin{aligned} \varphi^2 - \varphi &= 2 \\ \varphi^2 - \varphi - 2 &= 0 \\ \varphi &= 2 \\ 2^{\frac{x+y}{6}} &= 2^1 \\ \frac{x+y}{6} &= 1 \Leftrightarrow x + y = 6 \quad (2) \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (1), (2) βρίσκουμε $x = 5$ και $y = 1$

21.

Να βρείτε τις τιμές του α ώστε να ορίζεται σ' όλο το $\mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$f(x) = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \right)^x.$$

Προτεινόμενη λύση

Πρέπει και αρκεί $\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} > 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)(\alpha + 1) > 0$

Θυμήσου πως λύνουμε
ανίσωση 2^{ου} βαθμού

$$\alpha^2 - 1 > 0$$

$$\alpha < -1 \quad \text{ή} \quad \alpha > 1$$

22.

Να βρείτε τις τιμές του α ώστε η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{3\alpha-5}{\alpha+1}\right)^x$ να είναι

i) Γνησίως αύξουσα

ii) Γνησίως φθίνουσα

Προτεινόμενη λύση

i)

$$f \text{ γνησίως αύξουσα} \Leftrightarrow \frac{3\alpha-5}{\alpha+1} > 1 \Leftrightarrow \frac{3\alpha-5}{\alpha+1} - 1 > 0$$

Θυμήσου πως λύνουμε
ανίσωση 2^{ου} βαθμού

$$\frac{3\alpha-5-\alpha-1}{\alpha+1} > 0$$

$$\frac{2\alpha-6}{\alpha+1} > 0$$

$$(2\alpha-6)(\alpha+1) > 0$$

$$(\alpha-3)(\alpha+1) > 0$$

$$\alpha < -1 \quad \text{ή} \quad \alpha > 3$$

ii)

$$f \text{ γνησίως φθίνουσα} \Leftrightarrow 0 < \frac{3\alpha-5}{\alpha+1} < 1$$

$$\text{Η στα αριστερά ανίσωση γράφεται } \frac{3\alpha-5}{\alpha+1} > 0$$

$$(3\alpha-5)(\alpha+1) > 0$$

$$\alpha < -1 \quad \text{ή} \quad \alpha > \frac{5}{3} \quad (1)$$

$$\text{Η στα δεξιά ανίσωση γράφεται } \frac{3\alpha-5}{\alpha+1} < 1$$

$$\frac{3\alpha-5}{\alpha+1} - 1 < 0$$

$$\frac{2\alpha-6}{\alpha+1} < 0$$

$$(2\alpha-6)(\alpha+1) < 0$$

$$-1 < \alpha < 3 \quad (2)$$

Συναλθεύοντας τις (1) και (2) βρίσκουμε $\frac{5}{3} < \alpha < 3$

23.Έστω η συνάρτηση $f(x) = (1 - \alpha^4)^x$ **i)** Να βρείτε για ποιες τιμές του α ορίζεται η f **ii)** Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του α για τις οποίες η f είναι γνησίως αύξουσα**iii)** Να βρείτε το α ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο

$$A\left(1, \frac{1}{2}\right)$$

iv) Να βρείτε το α ώστε η γραφική παράσταση να διέρχεται από το $B(2, 1)$ **Προτεινόμενη λύση**

$$\begin{aligned} \text{i) Για να ορίζεται η } f, \text{ πρέπει και αρκεί } & 1 - \alpha^4 > 0 \\ & (1 + \alpha^2)(1 - \alpha^2) > 0 \\ & 1 - \alpha^2 > 0 \\ & \alpha^2 - 1 < 0 \\ & -1 < \alpha < 1 \quad (1) \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} f \text{ γνησίως αύξουσα} & \Leftrightarrow 1 - \alpha^4 > 1 \\ & -\alpha^4 > 0 \\ & \alpha^4 < 0 \text{ πράγμα αδύνατο} \end{aligned}$$

Άρα δεν υπάρχουν τιμές του α για τις οποίες η f είναι γνησίως αύξουσα.**iii)**

$$\begin{aligned} \text{Πρέπει και αρκεί } f(1) = \frac{1}{2} & \Leftrightarrow 1 - \alpha^4 = \frac{1}{2} \\ & \alpha^4 = \frac{1}{2} \\ & \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{aligned}$$

Δεκτές και οι δύο τιμές, αφού ικανοποιούν την (1)

iv)

$$\begin{aligned} \text{Πρέπει και αρκεί } f(2) = 1 & \\ (1 - \alpha^4)^2 = 1 & \\ 1 - \alpha^4 = 1 \quad \text{ή} \quad 1 - \alpha^4 = -1 & \\ \alpha = 0 \quad \text{ή} \quad \alpha^4 = 2 & \\ \alpha = 0 \quad \text{ή} \quad \alpha = \sqrt[4]{2} \quad \text{ή} \quad \alpha = -\sqrt[4]{2} & \\ \alpha = 0 & \text{ οι άλλες απορρίπτονται γιατί δεν ικανοποιούν την (1)} \end{aligned}$$

24.Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2^x$. Δείξτε ότι

i) $f(x) \cdot f(y) = f(x + y)$

ii) $f(x) = f(x - y) \cdot f(y)$

iii) $[f(x)]^v = f(vx)$

iv) $\frac{f(x)}{f(y)} = f(x - y)$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$f(x) \cdot f(y) = 2^x \cdot 2^y = 2^{x+y} = f(x + y)$$

ii)

$$f(x - y) \cdot f(y) = 2^{x-y} \cdot 2^y = 2^{x-y+y} = 2^x = f(x)$$

iii)

$$[f(x)]^v = (2^x)^v = 2^{vx} = f(vx)$$

iv)

$$\frac{f(x)}{f(y)} = \frac{2^x}{2^y} = 2^{x-y} = f(x - y)$$

25.Αν $f(x) = \frac{1}{2}(\alpha^x + \alpha^{-x})$ και $g(x) = \frac{1}{2}(\alpha^x - \alpha^{-x})$, δείξτε ότι

$$f(x + y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned}
 f(x)f(y) + g(x)g(y) &= \frac{1}{2}(\alpha^x + \alpha^{-x}) \frac{1}{2}(\alpha^y + \alpha^{-y}) + \frac{1}{2}(\alpha^x - \alpha^{-x}) \frac{1}{2}(\alpha^y - \alpha^{-y}) \\
 &= \frac{1}{4}(\alpha^{x+y} + \alpha^{-x+y} + \alpha^{x-y} + \alpha^{-x-y}) + \frac{1}{4}(\alpha^{x+y} - \alpha^{-x+y} - \alpha^{x-y} + \alpha^{-x-y}) \\
 &= \frac{1}{4}(2\alpha^{x+y} + 2\alpha^{-x-y}) = \frac{1}{2}(\alpha^{x+y} + \alpha^{-x-y}) = f(x + y)
 \end{aligned}$$

26.

Αν $f(x) = e^x$, δείξτε ότι $f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$, όπου $x \neq y$.

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2} &\Leftrightarrow e^{\frac{x+y}{2}} < \frac{e^x + e^y}{2} \\
 2e^{\frac{x+y}{2}} &< e^x + e^y \\
 \left(2e^{\frac{x+y}{2}}\right)^2 &< (e^x + e^y)^2 \\
 4e^{x+y} &< e^{2x} + 2e^x e^y + e^{2y} \\
 4e^{x+y} &< e^{2x} + 2e^{x+y} + e^{2y} \\
 e^{2x} - 2e^{x+y} + e^{2y} &> 0 \\
 (e^x - e^y)^2 &> 0 \quad \text{που ισχύει.}
 \end{aligned}$$

27.

Ο χρόνος υποδιπλασιασμού ενός ραδιενεργού υλικού είναι 5 χρόνια .

i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση που εκφράζει τη μεταβολή της αρχικής ποσότητας

$$Q_0 \text{ του υλικού συναρτήσει του χρόνου είναι η } Q(t) = Q_0 2^{-\frac{t}{5}}$$

ii) Αν η αρχική ποσότητα του υλικού είναι 10gr να βρείτε πόσο υλικό θα έχει μείνει μετά από 100 χρόνια

iii) Μετά από πόσα χρόνια θα έχουν μείνει $10 \cdot 4^{-5}$ gr υλικού;

Προτεινόμενη λύση

i)

Γνωρίζουμε ότι η μεταβολή της αρχικής ποσότητας Q_0 συναρτήσει του χρόνου δίνεται από τον τύπο $Q(t) = Q_0 e^{ct}$.

Επειδή η ημιζωή του υλικού είναι 5 χρόνια, θα ισχύει $Q(5) = \frac{Q_0}{2}$

Όμως από τον τύπο της εκθετικής μεταβολής για $t = 5$ έχουμε

$$Q(5) = Q_0 e^{5c} \Leftrightarrow \frac{Q_0}{2} = Q_0 e^{5c}$$

$$e^{5c} = \frac{1}{2}$$

$$(e^c)^5 = \frac{1}{2}$$

$$e^c = \sqrt[5]{\frac{1}{2}}$$

$$e^c = \frac{1}{\sqrt[5]{2}} \Leftrightarrow e^c = \frac{1}{2^{\frac{1}{5}}} \Leftrightarrow e^c = 2^{-\frac{1}{5}}$$

Επομένως ο τύπος της εκθετικής μεταβολής γίνεται $Q(t) = Q_0 (e^c)^t$

$$Q(t) = Q_0 \left(2^{-\frac{1}{5}}\right)^t$$

$$Q(t) = Q_0 2^{-\frac{t}{5}}$$

ii)

Ο τύπος της εκθετικής απόσβεσης που βρήκαμε παραπάνω, για $t=100$ και $Q_0 = 10$

$$\text{δίνει } Q(100) = 10 \cdot 2^{-\frac{100}{5}} \text{ gr} \Leftrightarrow Q(100) = 10 \cdot 2^{-20} \text{ gr}$$

iii)

Θέλουμε να βρούμε το t ώστε να ισχύει $Q(t) = 10 \cdot 4^{-5}$

$$10 \cdot 2^{-\frac{t}{5}} = 10 \cdot 4^{-5}$$

$$2^{-\frac{t}{5}} = 4^{-5}$$

$$2^{-\frac{t}{5}} = 2^{-10}$$

$$\frac{t}{5} = 10 \Leftrightarrow t = 50 \text{ έτη}$$

28.

Μία ποσότητα ραδιενεργού υλικού θάβεται και με την πάροδο του χρόνου η ποσότητα μειώνεται με βάση την συνάρτηση $Q(t) = Q_0 e^{ct}$, όπου Q_0 είναι η αρχική ποσότητα του υλικού, c αρνητική σταθερά και t ο χρόνος σε έτη.

Αν γνωρίζουμε ότι μετά από δύο χρόνια έχει μείνει το $\frac{1}{3}$ της αρχικής ποσότητας

- i) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης
- ii) Αν μετά τέσσερα χρόνια η ποσότητα του υλικού είναι ένα κιλό, να βρείτε την αρχική ποσότητα.
- iii) Μετά από πόσα χρόνια θα έχουν μείνει $\frac{1}{81}$ κιλά;

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\text{Είναι } Q(2) = \frac{Q_0}{3} \Leftrightarrow Q_0 e^{2c} = \frac{Q_0}{3}$$

$$e^{2c} = \frac{1}{3}$$

$$e^c = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow e^c = 3^{-\frac{1}{2}}$$

Άρα ο τύπος της συνάρτησης είναι $Q(t) = Q_0 \cdot 3^{-\frac{t}{2}}$

ii)

$$Q(4) = 1 \Leftrightarrow Q_0 \cdot 3^{-\frac{4}{2}} = 1$$

$$Q_0 \cdot 3^{-2} = 1$$

$$Q_0 = \frac{1}{3^{-2}} \Leftrightarrow Q_0 = 9$$

iii)

$$\text{Θέλουμε το } t \text{ ώστε να ισχύει } Q(t) = \frac{1}{81} \Leftrightarrow 9 \cdot 3^{-\frac{t}{2}} = \frac{1}{81}$$

$$3^{2 - \frac{t}{2}} = 3^{-4}$$

$$2 - \frac{t}{2} = -4 \Leftrightarrow t = 12$$

Οπότε μετά από 12 χρόνια θα έχουν μείνει $\frac{1}{81}$ κιλά.